Una formula per $(1/f(x))^{(n)}$, e alcune applicazioni.

Riassunto. *Viene dedotta per induzione la formula per la derivata n-esima della inversa di una funzione di classe $C^{(n)}$, analoga alla formula del prodotto $(f(x).g(x))^{(n)}$ formulata da Leibnitz. Si conclude con alcune applicazioni al calcolo di integrali di funzioni razionali, alla teoria dei residui in variabile complessa e al calcolo di zeri di funzioni.*

§1. Motivazione

Nel marzo del 85, quando iniziai a scrivere la mia prima tesi di laurea, in Venezuela, riprendendo gli esercizi n° 3 e 4 del Examples XLVIII, del classico, *'A Course of Pure Mathematics'* dell'illustre Godfrey Harold Hardy, **[1]** notaì un metodo veloce e innovativo per calcolare i coefficenti dello sviluppo di una integrale razionale, il cui denominatore era un polinomio con radici di molteplicità 1 *.

Il problema in questione è: *Se tutte le radici di Q(x)=0 sono reali e diverse, e P(x) è di grado minore che Q(x), allora,*

$$\int \frac{P(x)dx}{Q(x)} = \sum_\alpha \frac{P(\alpha)}{Q'(x)} \ln|x-\alpha| \tag{1}$$

su tutte le radici α di Q(x)=0.

Se invece:

$$Q(x) = (x-\alpha)^2 \prod_\beta (x-\beta)$$

allora,

$$\int \frac{P(x)dx}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + A' \ln|x-\alpha| + \sum_\beta B \ln|x-\beta| \tag{2}$$

dove,

$$A = \frac{-2P(\alpha)}{Q''(\alpha)}, \quad A' = \frac{2\{3P'(\alpha)Q''(\alpha) - P(\alpha)Q'''(\alpha)\}}{3\{Q''(\alpha)\}^2}, \quad B = \frac{P(\beta)}{Q'(\beta)}.$$

Risolviamo prima il caso in cui le radici di Q(x) siano semplici.

Poi,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod_\alpha (x-\alpha)} = \sum_\alpha \frac{A_\alpha}{x-\alpha}.$$

* Vedere anche esercizio 2, a pag 32 di Ahlfors,[2].

Allora, applicando il Lemma di Hospital,

$$A_\alpha = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{P(x)}{Q'(x)} = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

Vediamo ora il caso in cui $Q(x)$ ha almeno una radice doppia. Allora per ottenere (2) basta calcolare A e A', perché B segue dalla prima parte.

Poi, di nuovo per l'Hospital,

$$A = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)^2 P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{2P(x)}{Q''(x)} = \frac{2P(\alpha)}{Q''(\alpha)}.$$

Poi per calcolare A' si procede così:

$$\begin{aligned} A' &= \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)P(x)}{(x-\alpha)^2 Q_1(x)}, \ \textit{dove} \ \ Q_1(x) \neq 0 \\ &= \lim_{x\to\alpha} \frac{\left(\frac{P}{Q_1}\right)(\alpha)}{(x-\alpha)} = \left(\frac{P}{Q_1}\right)'(\alpha) = \frac{P'(\alpha)Q_1(\alpha) - P(\alpha)Q_1'(\alpha)}{Q_1^2(\alpha)}. \end{aligned}$$

Ora, come

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-\alpha)^2 Q_1(x) \\ Q'(x) &= 2(x-\alpha)Q_1(x) + (x-\alpha)^2 Q_1'(x) \\ Q''(x) &= 2Q_1(x) + 4(x-\alpha)Q_1'(x) + (x-\alpha)^2 Q_1''(x) \\ Q'''(x) &= 6Q_1'(x) + 6(x-\alpha)Q_1''(x) + (x-\alpha)^2 Q_1'''(x). \end{aligned}$$

Si ha,

$$\begin{aligned} Q_1(\alpha) &= 1/2 \ Q''(\alpha) \\ Q_1'(\alpha) &= 1/6 \ Q'''(\alpha). \end{aligned}$$

Poi,

$$A' = \frac{P'(\alpha)\frac{1}{2}Q''(\alpha) - P(\alpha)\frac{1}{6}Q'''(\alpha)}{\frac{1}{4}\{Q_1^2(\alpha)\}} = \frac{2\{3P'(\alpha)Q''(\alpha) - P(\alpha)Q'''(\alpha)\}}{3\{Q''(\alpha)\}^2}.$$

Dallo sviluppo anteriore è chiaro che una formula per la derivata $n-esima$ del quoziente di due polinomi, comporterebbe una formula per il calcolo di tutti i coefficenti dello sviluppo di una integrale razionale.

È anche chiaro che:

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{(n)} = \left(f \cdot g^{(-1)}\right)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot \left(g^{(-1)}\right)^{(n-k)}$$

per la formula di Leibnitz. Adesso daremo una formula per $g^{(-1)^{(n)}}$, per poi calcolare tutti i coefficenti dello sviluppo di una integrale razionale.

§2. Una formula per la derivata n-esima del quoziente.

Prima di iniziare, è necessario ricordare *:

$$\left(\sum_{n=1}^{m} a_i\right)^n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} \frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_m!}\left(\prod_{i=1}^{m} a_i^{i_j}\right) \tag{3}$$

notare che per $m = 2$, e la formula del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!\cdot j!}\ a^i \cdot b^j.$$

Teorema. *Se f(x)$\neq 0 \in C^{(n)}$ allora,*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \left\{(-1)^k \cdot f^{-(k+1)} \cdot \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n} \frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_k!}\left(\prod_{j=1}^{k} f^{(i_j)}\right)\right\} \tag{4}$$

notare che $f^{-(k+1)} = f^{-k-1}$, mentre $f^{(i_j)} = (f^{(i_j-1)})'$.

Prova. (Per Induzione)

Se n=1, allora per le regole di derivazione $\left(f^{-1}\right)' = -f^{-2}\cdot f'$, mentre se n=1, in (4), k è al più uguale a 1,

$$\sum_{j=1}^{1} i_j = 1, \Rightarrow i_1 = 1,$$

poi,

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(1)} = (-1)^{(1)} \cdot f^{(-2)} \cdot \frac{1!}{1!} \cdot f^{(1)}.$$

Se n=2, allora $\left(f^{-1}\right)^{(2)} = \left(f^{-1}\right)'' = \left(-f^{-2}\cdot f\ '\right)\ ' = 2f^{-3}\left(f\ '\right)^2 - f^{-2}f\ ''$, mentre se n=2 in (4), k assume due valori: 1 e 2,

$$\sum_{j=1}^{1} i_j = 2 \Rightarrow i_1 = 2$$

e

$$\sum_{j=1}^{2} i_j = 2 \Rightarrow i_1 = 1, i_2 = 1.$$

* Vedere esercizio 36 a pagina 7 in Pólya [3], con h = 1

Poi la formula sarà:

$$\left(f^{-1}\right)^{(2)} = (-1)^{(1)} \cdot f^{(-2)} \cdot \frac{2!}{2!} f^{''} + (-1)^2 f^{-3} \cdot \frac{2!}{1!\,1!} f^{'} \cdot f^{'}.$$

Se n=3, allora,

$$\left(f^{-1}\right)^{(3)} = \left(2f^{-3} \cdot \left(f^{\ '}\right)^2 - f^{-2} \cdot f^{\ ''}\right)' = -6f^{-4} \cdot \left(f^{\ '}\right)^3 + 6f^{-3} \cdot f' \cdot f'' - f^{-2} \cdot f^{\ '''}.$$

mentre se n=3, in (4) si ha,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{1} i_j = 3; \Rightarrow i_1 = 3, \\ &\sum_{j=1}^{2} i_j = 3 \Rightarrow i_1 = 1, i_2 = 2 \quad e \quad i_1 = 2, i_2 = 1, \\ &\sum_{j=1}^{3} i_j = 3, \Rightarrow i_1 = i_2 = i_3 = 1. \end{aligned}$$

Poi la formula sarà:

$$\left(f^{-1}\right)^{(3)} = (-1)^1 \cdot f^{(-2)} \cdot \frac{3!}{3!} f^{'''} + (-1)^2 \cdot 2 \cdot f^{-3} \frac{3!}{1!\,2!} f^{'} f^{''} + (-1)^3 f^{-4} \frac{3!}{1!\,1!\,1!} \left(f^{'}\right)^{(3)}.$$

Supponiamo che la formula sia vera fino a n, ovvero:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ (-1)^k \cdot f^{-(k+1)} \cdot \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n} \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_k!} \left(\prod_{j=1}^{k} f^{(i_j)} \right) \right\}.$$

Allora avremo provato il Teorema se

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n+1)} = \left(\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)}\right)^{'} = \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ (-1)^k \cdot f^{-(k+1)} \cdot \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n+1} \frac{(n+1)!}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_k!} \left(\prod_{j=1}^{k} f^{(i_j)} \right) \right\}. \tag{5}$$

Adesso, per ipotesi

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f}\right)^{(n+1)} &= \left(\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)}\right)^{'} = \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k f^{-(k+1)} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n} \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_k!} \left(\prod_{j=1}^{k} f^{(i_j)} \right) \right)^{'} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ (-1)^k (-1)(k+1) f^{-k-1-1} f^{'} \cdot \left(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n} \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_k!} \left(\prod_{j=1}^{k} f^{(i_j)} \right) \right) \right. \\ &\qquad \left. + (-1)^k f^{-(k+1)} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n} \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_k!} \left(\sum_{j=1}^{k} f^{(i_j+1)} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m} f^{(i_l)} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n}\Bigg\{(-1)^{k+1}(k+1)f^{-(k+2)}\Big(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}\frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_k!}\Big(\prod_{j=1}^{k}f^{'}f^{(i_j)}\Big)\Big)\Bigg\}\\
&\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{n}\Bigg\{(-1)^{k}f^{(k+1)}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}\frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_k!}\Big(\sum_{j=1}^{k}f^{(i_j+1)}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{k}f^{(i_l)}\Big)\Bigg\}\\
&= \sum_{k=2}^{n+1}\Bigg\{(-1)^{k}f^{-(k+1)}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{k-1}=n+1}\frac{k\cdot n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_{k-1}!}\Big(\sum_{j=1}^{k-1}f^{'}f^{(i_j)}\Big)\Bigg\}\\
&\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{n}\Bigg\{(-1)^{k}f^{(k+1)}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}\frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_k!}\Big(\sum_{j=1}^{k}f^{(i_j+1)}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{k}f^{(i_l)}\Big)\Bigg\}\\
&= \sum_{k=2}^{n}\Bigg\{(-1)^{k}f^{-(k+1)}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{k-1}=n+1}\frac{k\cdot n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_{k-1}!}\Big(\sum_{j=1}^{k-1}f^{'}f^{(i_j)}\Big)\Bigg\}\\
&\qquad + (-1)^{n+1}\cdot f^{-(n+2)}\cdot\frac{(n+1)n!}{\underbrace{1!\cdot 1!\cdots 1!}_{n}}\cdot\Big(f'\Big)^{(n+1)} + (-1)^{1}\cdot f^{-2}\cdot\frac{n!}{n!}\cdot f^{(n+1)}\\
&\qquad + \sum_{k=2}^{n}\Bigg\{(-1)^{k}f^{-(k+1)}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}\frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_k!}\Big(\sum_{j=1}^{k}f^{(i_j+1)}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{k}f^{(i_l)}\Big)\Bigg\}\\
&= (-1)^{1}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)!}\cdot f^{-2}\cdot f^{(n+1)}+\\
&\quad \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}f^{-(k+1)}\Bigg\{\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{k-1}=n+1}\frac{k\cdot n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_{k-1}!}\Big(\prod_{j=1}^{k-1}f^{'}f^{(i_j)}\Big)+\\
&\qquad\qquad + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}\frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_k!}\Big(\sum_{j=1}^{k}f^{(i_j+1)}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{k}f^{(i_l)}\Big)\Bigg\}\\
&\qquad + (-1)^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot f^{-(n+2)}\cdot\Big(f'\Big)^{(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Adesso ricordando la prova per ottenere la formula (3), si ottiene la formula (4) e si ha la tesi.

Poi come,

$$
\Big(\frac{1}{g}\Big)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}g^{-(k+1)}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}\frac{n!}{i_1!i_2!si_k!}\Big(\prod_{j=1}^{k}g^{(i_j)}\Big),
$$

se $g(x)\neq 0$, si ottiene che:

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{f}{g}\Big)^{(n)} &= \Big(f\frac{1}{g}\Big)^{(n)} = \sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}f^{(n-v)}\Big(\frac{1}{g}\Big)^{v} =\\
&\qquad = \sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}f^{(n-v)}\sum_{k=1}^{v}(-1)^{k}g^{-k-1}\cdot\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}\frac{v!}{i_1!\cdot i_2!\cdot i_k!}\Big(\prod_{j=1}^{k}g^{(i_j)}\Big).
\end{aligned}
$$

§3. Applicazioni alla soluzione delle integrali Razionali

Teorema 1. *Sia R(x)=$\frac{P(x)}{Q(x)}$ una funzione razionale propria, grado di P(x) < grado Q(x).*

Allora se Q(x)=$\prod_{i=1}^{m}(x-z_i)^{k_i}$, ($z_i$ radice complessa di molteplicità k_i), si avrà:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-z_i)^j}.$$

dove

$$A_{ij} = \frac{1}{(k_i-j)!}\Big(\frac{P}{Q_i}\Big)^{(k_i-j)}(z_i) \quad e \quad Q_i(x) = \frac{Q(x)}{(x-z_i)^{k_i}}$$

Prova. In effetti, se $Q(x) = (x-z_i)^k \cdot Q_1(x),\ Q_1(z_i) \neq 0$, il termine p nello sviluppo anteriore è,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to z_i}\frac{(x-z_i)^p P(x)}{Q(x)} &= \lim_{x\to z_i}\frac{(x-z_i)^p P(x)}{(x-z_i)^k Q_1(x)}\\ &= \lim_{x\to z_i}\frac{P(x)}{(x-z_i)^{k-p}Q_1(x)} = \frac{1}{(k-p)!}\Big(\frac{P}{Q_1}\Big)^{(k-p)}(z_i)\end{aligned}$$

e $P(z_i) \neq 0$, giacchè la funzione è razionale propria.

Chiaramente se $Q(x)$ ha soltanto radici reali x_i, allora

Corollario 1.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\frac{P(x_i)}{Q'(x_i)}}{x-x_i}$$

oppure, se le radici hanno molteplicità,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)^{k_i}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{(k_i-j)!}\frac{\big(\frac{P}{Q_i}\big)^{(k_i-j)}(x_i)}{(x-x_i)!},$$

dove $Q_i(x) = \frac{Q(x)}{(x-z_i)^{k_i}}$.

Corollario 2

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{m}\big\{(x-z_i)(x-\overline{z_i})\big\}} = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\frac{B_i\ x\ +\ C_i}{(x-z_i)(x-\overline{z_i})}$$

dove $B_j = 2\ Re(D_i)$, $\ C_i = \ -2\ Re(D_i\overline{z_i})$**, essendo,** $D_i = \frac{P}{Q'}(z_i)$**, (**$Re(z)$ **è la parte reale di** z**).**

Infatti,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{m}\big\{(x-z_i)(x-\overline{z_i})\big\}} = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \frac{\frac{P(z_i)}{Q'(x_i)}}{x-z_i} + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \frac{\frac{P(\overline{z_i})}{Q'(\overline{z_i})}}{x-\overline{z_i}}.$$

Poi se definiamo, $D_i = \frac{P}{Q'}(z_i)$, si ha $\overline{D_i} = \frac{P}{Q'}(\overline{z_i})$, allora

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \frac{D_i(x-\overline{z_i}) + \ \overline{D_i}(x-z_i)}{(x-z_i)(x-\overline{z_i})} \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \frac{x(D_i+\overline{D_i}) - \big(D_i\ \overline{z_i} + \ \overline{D_i}\ z_i\big)}{(x-z_i)(x-\overline{z_i})} = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \frac{B_i\ x\ +\ C_i}{(x-z_i)(x-\overline{z_i})}\end{aligned}$$

dove $B_j = 2\ Re(D_i)$, $\ C_i = \ -2\ Re(D_i\overline{z_i})$.

Corollario 3. *Sia,*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{m}\big\{(x-z_i)(x-\overline{z_i})\big\}^{k_i}} = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{B_{ij}\ x\ +\ C_{ij}}{\big\{(x-z_i)(x-\overline{z_i})\big\}^{j}}$$

allora se definiamo,

$$D_i = \frac{1}{(k_i-j)!}\Big(\frac{P}{Q_i}\Big)^{(k_i-j)}(z_i), \quad dove \quad Q_i(x) = \frac{Q(x)}{(x-z_i)^{k_i}}$$

avremo che

$$B_{ij} = 2\ j\ (-1)^{j-1} Re(\overline{D_i} {z_i}^{j-1}), \quad C_{ij} = 2\ (-1)^{j} Re(\overline{D_i} {z_i}^{j}).$$

Prova.

$$R(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{D_i}{(x-z_i)^j} = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{D_i(x-\overline{z_i})^j + \ \overline{D_i}(x-z_i)^j}{\big\{(x-z_i)(x-\overline{z_i})\big\}^{j}}$$

Giacchè, $a\overline{b} + b\overline{a} = 2Re(a\overline{b})$, allora applicandolo al numeratore abbiamo

$$\begin{aligned}D_i\ (x-\overline{z_i})^j \ +\ \overline{D_i}\ (x-z_i)^j &= 2Re(\overline{D_i}\ (x-z_i)^j) \\ &= 2Re\Big(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} x^k (-1)^{j-k}\overline{D_i}\ {z_i}^{j-k}\Big) = 2\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} x^k (-1)^{j-k} Re\big(\overline{D_i}\ {z_i}^{j-k}\big)\end{aligned}$$

Ma come le potenze x^k non superano x^1, allora basta considerare soltanto, $k = 0\,,1$. Allora,

$$
\begin{aligned}
&= 2\Big[\binom{j}{0}(-1)^j \cdot x^0 \cdot Re(\overline{D_i}\ (z_i)^j)\ +\ j(-1)^{j-1} \cdot x \cdot Re(\overline{D_i}\ (z_i)^j)\Big] \\
&= \Big(2(-1)^j Re(\overline{D_i}\ (z_i)^j)\Big) + \Big(2j(-1)^{j-1} Re(\overline{D_i}\ (z_i)^j)\Big)\ x \\
&= B_{ij} \cdot x + C_{ij}
\end{aligned}
$$

Si noti che se $k_i = 1 \quad \forall i$, allora $j = 1$, cioè siamo nel Corollario 2,

$$B_{i1} = 2\ j\ (-1)^0 Re(\overline{D_i}), \quad C_{i1} = 2\ (-1) Re(\overline{D_i} z_i).$$

Infine,

Corollario 4. *Sia R(x) una funzione razionale propria, tale che,*

$$
\begin{aligned}
R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^m (x-x_i)^{r_i} \prod_{i=1}^n (x-z_i)^{s_i}} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \frac{B_{ij}\ x\ +\ C_{ij}}{(x-z_i)(x-\overline{z_i})}
\end{aligned}
$$

allora se definiamo,

$$D_{ij} = \frac{1}{(s_i - j)!} \Big(\frac{P}{Q_{i2}}\Big)^{(s_i - j)}(z_i), \quad dove \quad Q_{2i}(x) = \frac{Q(x)}{(x-z_i)^{r_i}}$$

avremo che,

$$A_{ij} = \frac{1}{(r_i - j)!} \Big(\frac{P}{Q_{j1}}\Big)^{(r_i - j)}(x_i), \quad dove \quad Q_{1i}(x) = \frac{Q(x)}{(x-x_i)^{s_i}}$$

e,

$$B_{ij} = 2\ j\ (-1)^{j-1} Re(\overline{D_i} {z_i}^{j-1}), \quad C_{ij} = 2\ (-1)^j Re(\overline{D_i} {z_i}^j).$$

Esempi.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}.$

Allora,

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \Big\{\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\Big\} dx.$$

Adesso per il Corollario 1,

$$P(x) \equiv 1$$
$$Q(x) = x^2 - 1 \quad e \quad Q'(x) = 2 \cdot x, \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -1.$$
$$A = \frac{1}{Q'(x_1)} = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{1}{Q'(x_2)} = \frac{-1}{2}$$

Poi,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\Big\{ \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1} \Big\} = \frac{1}{2}\Big\{ \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \Big\} = \frac{1}{2} \ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big| + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1}$.

Allora, sviluppando

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{dx}{(x-i)(x+i)} = \int \Big\{ \frac{A}{x-i} + \frac{B}{x+i} \Big\} dx.$$

Adesso per il Corollario 1,

$$P(x) \equiv 1$$
$$Q(x) = x^2 + i; \; Q'(x) = 2\; x. \;\; x_1 = i; \;\; x_2 = -i.$$
$$A = \frac{1}{Q'(x_1)} = \frac{1}{2i}; \quad B = \frac{1}{Q'(x_2)} = \frac{-1}{2i}$$

Poi,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+1} &= \frac{1}{2i} \; \Big\{ \frac{dx}{x-i} + \frac{dx}{x+i} \Big\} \\ &= \frac{1}{2i} \; \Big\{ \ln(x-i) - \ln(x+i) + C \Big\} = \frac{1}{2i} \ln\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big) + C \quad = \arctan(x)\end{aligned}$$

Poi dalla definizione di logaritmo complesso,

$$\ln(x \pm iy) \;\; = \;\; \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) \pm i(\phi + 2k\pi)$$

dove k è un intero e ϕ e l'angolo definito da l'argomento di x + iy,

$$\frac{1}{2i} \ln\Big(\frac{x - iy}{x + yi}\Big) \;\; = \;\; -\phi - l\pi$$

dove l è intero e questo differisce da una costante dal valore di $arctan(x)$, infine

$$\arctan(x) = \frac{1}{2i} \ln\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big) \;\; = \;\; \frac{1}{2i} \ln\Big(\frac{1+ix}{1-ix}\Big) \;\; = \;\; Im(\ln(1+ix)),$$

dove x è reale. Questa formula può essere anche dedotta partendo dalla formula della tangente complessa per ottenere l'inversa.

3. $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x-4)} dx$

Allora,

$$I=\int\frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x-4)}dx=\int\Big\{\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{B}{(x-4)}\Big\}dx$$

Adesso per il Corollario 1,

$$\begin{aligned}
P(x)&=3x^2+1\\
P'(x)&=6\cdot x\\
Q(x)&=(x-1)^3(x-4)=x^4-7x^3+15x^2-13x+4 \;=\; (x-1)^3Q_1(x)\\
Q'(x)&=4x^3-21x^2+30x-13.
\end{aligned}$$

Poi,

$$\begin{aligned}
B&=\frac{P(4)}{Q'(4)}= \;\frac{34^2+1}{4\cdot4^3-21\cdot4^2+120-13}=\frac{49}{27}\\
A_{3-k}&=\frac{1}{k!}\Big(\frac{P}{Q}\Big)^{(k)}(1);\quad \frac{P}{Q_1}=\frac{3x^2+1}{x-4}=\;(3x+12)+\frac{49}{x-4}\\
A_3&=\frac{1}{0!}\Big(\frac{P}{Q}\Big)^{(0)}(1)=\frac{-4}{3}\\
A_2&=\frac{1}{1!}\Big(\frac{P}{Q}\Big)'(1)=\Big((3x+12)+49\,\Big(\frac{1}{x-4}\Big)\Big)'(1)=3x\Big|_{x=1}+\;49\,\Big(\frac{1}{x-4}\Big)'\Big|_{x=1}\\
&=3+49\Big(\frac{1}{(x-4)^2}\Big)'\Big|_{x=1}=3+\;\frac{(-49)}{(1-4)^2}=\frac{-22}{9}\\
A_1&=\frac{1}{2!}\Big(\frac{P}{Q}\Big)''(1)=\frac{1}{2}\Big((3x+12)+\frac{49}{x-4}\Big)''(1)=\frac{49}{2}\Big(\frac{1}{x-4}\Big)''(1)\\
&=\frac{49}{2}\Big(\frac{-2}{(x-4)^2}\Big)\Big|_{x=1}=\frac{-49}{27}
\end{aligned}$$

Infine,

$$\begin{aligned}
I&=\frac{-4}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^3}-\;\frac{22}{9}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\;\frac{49}{27}\int\frac{dx}{(x-1)}+\;\frac{49}{27}\int\frac{dx}{(x-4)}\\
&=\;\frac{-4}{3(-2)}\frac{1}{(x-1)^2}+\;\frac{22}{9}\frac{1}{x-1}+\;\frac{49}{27}\,\ln\Big|\frac{x-4}{x-1}\Big|+C\\
&=\;\frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)^2}+\;\frac{22}{9(x-1)}+\;\frac{49}{27}\,\ln\Big|\frac{x-4}{x-1}\Big|+C.
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int\frac{3x^2+8}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

Allora,

$$I=\int\frac{3x^2+8}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\;\int\frac{B_1x+C_1}{(x^2+1)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+4)}.$$

Utilizando il Corollario 2,

$$
\begin{aligned}
&P(x) = 3x^2 + 8\\
&Q(x) = (x^2+1)(x^2+4) = \ (x \pm i)(x \pm 2i) = \ x^4 + 5x^2 + 4.\\
&D_1 = \Big(\frac{P}{Q'}\Big)(i) = \ \frac{3i^2+8}{4i^3+10i} \ = \ \frac{-5i}{6}.\\
&B_1 = \ 2Re\ (\frac{-5i}{6}) = 0,\\
&C_1 = \ 2Re\ (\frac{-5i}{6}(-i)) = \ \frac{5}{3}.\\
&D_2 = \Big(\frac{P}{Q'}\Big)(2i) = \ \frac{i}{3}.\\
&B_2 = \ 2Re\ (\frac{i}{3}) = 0,\\
&C_2 = \ -2Re\ (\frac{i}{3}(-2i)) = \ -4/3.
\end{aligned}
$$

Poi,

$$
I = \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{5}{3}\arctan x \ - \ \frac{2}{3}\arctan(\frac{x}{2}) \ + \ C.
$$

§4. Applicazioni alla teoria dei residui

Il modo in cui solitamente ci viene introdotto il calcolo dei residui, è per risolvere integrali finiti o infiniti, di funzioni di variabile reale; cioè la teoria delle funzioni propone il calcolo dei residui come metodo per risolvere integrali di Analisi Matematica. Ora, in questa sezione, noi vedremo il contrario, cioè come un metodo di analisi matematica, quale è il calcolo della derivata n-esima del quoziente permetta di calcolare residui.

È chiaro che se definiamo funzione analitica o differenziabile di una variabile complessa z, in z_0, il limite,

$$
f'(z_0) \ = \ \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},
$$

allora la nostra formula (5), sarà valida anche nella teoria delle funzioni analitiche.

Diremo che $f(z)$ ha un zero di ordine k in z_0, se esiste $g(z)$ tale che

$$
f(z) \ = \ (z - z_0)^k \ g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.
$$

Analogamente diremo che $f(z)$ ha un polo di ordine k in z_0, se esiste $g(z)$ tale che

$$
f(z) \ = \ \frac{1}{(z - z_0)^k} \ g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.
$$

Ora, è noto dal teorema dei residui che se $f(z) = g(z)/h(z)$, ha un polo semplice in z_0, allora il *Residuo* di f in z_0 è

$$Res(f, z_0) \;=\; \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\; f(z) \;=\; \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

e se il polo è doppio, *

$$Res(f, z_0) \;=\; \frac{2\; g'(z_0)}{h''(z_0)} \;-\; \frac{2 \cdot g(z_0) h'''(z_0)}{3 \cdot h''(z_0)^2}$$

che coincidono perfettamente con i coefficienti A e A' a pag 1. Poi abbiamo motivato il

Teorema 2. *Siano g e h funzioni analitiche in z_0 e sia $g(z_0) \neq 0$ e $h(z) = (z - z_0)^k \cdot h_1(z)$, $h_1(z_0) \neq 0$. Allora g/h ha un polo di ordine $k > 1$ in z_0 è il residuo di è*

$$Res(\frac{g}{h}, z_0) \;=\; \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{g}{h_1} \right)^{(k-1)} (z_0), \qquad se \qquad k > 1$$

e

$$Res(\frac{g}{h}, z_0) \;=\; \frac{g}{h'}(z_0), \qquad se \qquad k = 1$$

Prova. Se $k = 1$ è banale. Se $k > 1$ è f ha un polo di ordine k in z_0, $f(z) = 1/(z - z_0)^k f_1$, $f_1(z_0) \neq 0$. Poi il residuo di f in z_0 è il coefficiente del termine $(z - z_0)^{(k-1)}$ nello sviluppo di Taylor di $f_1(z)$. Ma come $f_1(z) = g/h_1$ questo coefficente è chiaramente $\frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{g}{h_1} \right)^{(k-1)} (z_0)$.

Esempio 1. Calcoli il residuo di $f(z) = e^{iz}/z(z^2 + 1)^2$, nel polo doppio $z = i$.

In virtù del teorema 2, tale residuo è:

$$\begin{aligned} (e^{iz} \cdot z^{-1} \cdot (z+i)^{-2})'(i) \;&=\; e^{iz}(iz^{-1}(z+i)^{-2} \;-\; z^{-2}(z+i)^{-2} - 2z^{-1}(z+1)^{-3})|_{z=i} \\ &=\; \frac{1}{4e}(i^{-2} \cdot (1 + \frac{2}{i^4})) = -\frac{3}{4e} \end{aligned}$$

Esempio 2.

$$Calcoli \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$$

---

* Vedere Marsedn, pag 206-11 [**5**]

Poi $I = 2\pi \cdot i \left(\frac{x}{(x-\overline{x_0})^2}\right)'(x_0)$, dove x_0 e $\overline{x_0}$ sono le radici di $x^2+4x+13=0$. Cioè $x_0 = -2+3i$ e $\overline{x_0} = -2+3i$. Allora come,

$$\left(\frac{x}{(x-\overline{x_0})^2}\right)'(x_0) = (x-\overline{x_0})^2 - 2x(x-\overline{x_0})^3 = (x-\overline{x_0})^2 \cdot (1 - 2x_0(x_0-\overline{x_0})^{-1})$$
$$= \frac{-1}{36}(1 - \frac{2}{6i}(2+3i)) = -\frac{2i}{3\cdot 36} = -\frac{i}{3\cdot 18}$$

Cioè $I = -\frac{\pi}{27}$.

È chiaro che il contributo alla teoria avviene see (se e soltanto se) ogni funzione che ha un polo di ordine k è della forma,

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \qquad h(z) = (z-z_0)^k \cdot h_1(z), \qquad h_1(z_0) \neq 0,$$

ma questo è evidente.

Ora, il teorema dei residui su può scrivere in una forma analoga.

Teorema. *Se f è analitica eccetto nei poli con molteplicita k_i, allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(z)dz}{\Pi_{i=1}^n (z-z_i)^{k_i}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(k_i-1)!}(\frac{g}{h_i})^{(k_i-1)}(z_i)$$

dove

$$\Pi_{i=1}^n (z-z_i)^{k_i} = (z-z_i)^{k_i} h_i(z), h_i(z_i) \neq 0$$

Se $n=1$ e $k_1=1$, allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(z)dz}{(z-z_i)} = \frac{g(z)}{(z-z_i)'} = g(z_i)$$

che è la formula di Cauchy.

Ora diamo un'ultima applicazione !.

Il Corollario 4, ci mostra che una funzione razionale amette uno sviluppo del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(z-z_i)^{k_i}}$$

dove gli

$$A_i = Res(\frac{P}{Q}, z_i) \tag{6}$$

Insomma, la nota scomposizione in frazioni semplici di una funzione razionale non è altro che un caso particolare del teorema dei residui.

Ma in generale, se $f(z)$ e $g(z)$, sono analitiche e $g(z)$ ha un polo di ordine k in z_0, allora lo sviluppo di Laurent di $h(z)$ è:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = h(z) = \underbrace{\frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)}}_{p.p} + \sum_{n\geq 1} a_n(z-z)^n$$

dove $p.p$, sta per parte principale di $h(z_0)$ in z_0.

Allora (6) ci induce il

Teorema 3. *Il quoziente di due funzioni analitiche, dove quella al denominatore ha dei zeri, è una funzione razionale see essa ammette uno sviluppo di Laurent, finito, coincidente con la sua parte principale. In più, i coefficenti di tale sviluppo sono i residui di h nei punti, coincidenti con le derivate $(k-1)$ esime in tali punti, cioè:*

$$b_k = Res(\frac{f}{g}, z_k) \ = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{f}{g}\right)^{(k-1)}(z_k)$$

È importante dire che sia il Teorema 2, che 3, ci permettono di dimostrare il teorema dei residui comunemente noto, senza fare uso ne del Teorema di Cauchy ne del teorema sullo sviluppo in serie di Laurent, è per tanto di ricostruire la teoria dei residui in un modo completamente innovativo.

Epilogo.

Spero che pochi di voi eravate a conoscenza sia della formula qui dedotta che delle sue applicazioni. Ora come epilogo posso dirvi che più o meno uno anno dopo averla dedotta scoprì nella biblioteca della facoltà di Matematica dell'Università 'La Sapienza' di Roma, il libro [**4**], il quale dà nel suo Appendice C, un'altra prova della nostra formula basata su una sua proprietà ricorrente. Poi la utilizza per trovare zeri di funzioni e di sistemi di funzioni.

Il ragionamento base per trovare zeri di funzioni partendo dalla formula per la derivata $n-esima$ della funzione inversa è il seguente.

Sia $y = f(x)$, una funzione data, con derivata non nulla. Poi, chiaramente

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y).$$

Pertanto, il problema di trovare x tale che $f(x) = 0$ equivale al problema di trovare $f^{-1}(0)$. Dal Teorema di Taylor, chiaramente,

$$f^{-1}(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \left(\frac{1}{f}\right)^{(k)} (0) + Resto.$$

Ed è qui dove interviene la nostra formula. È ora più evidente la gran utilità della formula qui dedotta. Qualche risultato al riguardo è stato sviluppato nell'Appendice J di [**4**].

Credo che la nostra formula abbia ancora tante cose da dirci, quello che non capisco è perché non formì parte dei regolari corsi di Calcolo o di Teoria delle Funzioni, nella sua versione complessa. Credo che sia stato per pigrizia che non è stata sviluppata al momento suo.

Giovanni Orlando.

Bibliografia.

[1] Godfrey Harold Hardy, "A Course of Pure Mathematics", *Cambridge University Press - Cambridge* (1975), p252.

[2] Lars Valerian Ahlfors, "Complex Analysis", *MacGraw Hill - USA* (1979), p32.

[3] George Pólya - Gabor Szegö, "Problems and Theorems in Analysis - Vol I", *Springer Verlag - Berlin* (1972), p7.

[4] A. M. Ostrowski, "Solution of Equations and System of Equations", *Accademic Press - London* (1960), p7, 141, 180, 196 .

[5] Jerold. E. Marsden, "Basic Complex Analysis", *W.H. Freeman and Co. - S. Fransico* (1973), p216-11.

[4] Henri Cartan, "Théorie élémentaire des fonctions analitiques d'une variable complexe", *Hermann - Paris* (1961), p96.