Osservazioni sul Moto Iperbolico

Dr. Giovanni A. Orlando

24 Ottobre 1992

Abstract

Viene calcolato il moto relativistico uniformemente accelerato così come il suo tempo proprio. Poi questi risultati vengono applicati per risolvere una serie di problemi quali il tempo per raggiungere il centro della galassia e il paradosso dei gemelli

1. Introduzione.

Nella meccanica classica, il moto rettilineo uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, viene calcolato con la nota formula: $x = wt^2/2$, dove $v = wt$, essendo x lo spazio, v la velocità e w l'accelerazione.

Con l'avvento del principio di relatività einsteniano, questo moto viene sostanzialmente modificato, e risulta da una conseguenza, dalle *trasformazioni di Lorentz*:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

che ci forniscono le coordinate di un sistema di riferimento fisso (x, y, z, t) in funzione di un sistema di riferimento in movimento (x', y', z', t') con velocità V, essendo c la velocità della luce nel vuoto (pari a $2,99792458 \cdot 10^{10}$ cm/s).

Nella meccanica relativistica, lo spazio di dominio, non è euclideo, ma di Minkowski, dove i punti sono chiamati eventi. Un raggio vettore quadridimensionale nello spazio quadridimensionale ha come componenti:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

La distanza tra due eventi infinitesimi, ds, viene chiamata *intervallo* ed è definita da:

$$ds = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2},$$

che è invariante per le trasformazione di Lorentz, mentre il moto di un punto materiale è rappresentato, nello spazio di Minkowski, da una curva che viene chiamata *linea d'universo*.

Più in generale, un quadrivettore (4-vettore) A^i è una grandezza quadridimensionale le cui componenti A^0, A^1, A^2 e A^4, si trasformano come le componenti di un raggio vettore. Le trasformazioni di Lorentz ci forniscono le coordinate delle quantità fisse in funzione di quelle in moto, cioè:

$$A^0 = \gamma(A'^0 + \beta A'^1), \quad A^1 = \gamma(A'^1 + \beta A'^0), \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3 \tag{1}$$

dove

$$\beta = v/c, \quad \gamma^{-1/2} = 1 - \beta^2.$$

e quelle inverse, cioè A'^i in funzione di A^i, si ottengono sostituendo il segno $+$ col segno $-$, nelle due prime equazioni:

Per comodità di scrittura si introducono le componenti controvarianti A^i e covarianti A_i, definite da,

$$A^0 = A_0, \quad A^1 = -A_1, \quad A^2 = -A_2, \quad A^3 = -A_3,$$

e il quadrato del modulo del quadrivettore, A^i, è la grandezza,

$$A^i A_i = \sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3,$$

che è una grandezza (4-scalare) invariante per le trasformazioni di Lorentz.

Ora possiamo definire la (4-velocità):

$$u^i = \frac{dx^i}{ds},$$

dove ds è l'intervallo tra cui calcolare la velocità.

Ricordando la nozione di tempo proprio (o locale) $d\tau$:

$$dt' = d\tau = \gamma^{-1} dt = \frac{ds}{c},$$

dove V è la velocità tra il sistema "immobile" ($dx = dy = dz = 0$) è quello in movimento. Poi come,

$$\begin{array}{l} u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{\gamma c dt}{cdt} = \gamma, \\ u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{\gamma dx}{cdt} = \frac{\gamma}{c} v_x \\ u^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{cd\tau} = (\gamma, \gamma \frac{\mathbf{v}}{c}) \end{array} \tag{2}$$

dove $\mathbf{v}$ è la tradizionale velocità tridimensionale. Analogamente la 4-accelerazione, w^i, è,

$$w^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{du^i}{cd\tau}.$$

Allora come $dx_i dx^i = ds^2$, abbiamo

$$u^i u_i = 1 \tag{3}$$

e derivando

$$u_i w^i = 0 \tag{4}$$

che mostra che i quadrivettori velocità è accelerazione sono ortogonali.

2. Il moto iperbolico.

Siamo ora in grado di risolvere il

Problema. Determinare il moto relativistico uniformemente accelerato, cioè un moto rettilineo nel corso del quale l'accelerazione **w** resta costante nel proprio sistema di riferimento (ad ogni istante).

Soluzione. Denotiamo come al solito con K, il sistema di riferimento immobile e con K' quello solidale con il corpo, con accelerazione **w** e velocità iniziale $\mathbf{v} = 0$.

Come prima cosa, vediamo le componenti della 4-accelerazione, $w'^i = (0, w/c, 0, 0)$, in K'.

Essendo la velocità iniziale tridimensionale **v** nulla, allora $v = (0, 0, 0)$. Poi per l'equazione (3), $u = e_1 = (1, 0, 0, 0)$, e pertanto dall'equazione (4), segue:

$$\begin{array}{l} 0 = u_i w'^i = e_o \cdot w'^i = w'^0 \\ w'^1 = \frac{du^1}{ds} = \frac{d(v/c)}{cdt} = \frac{w}{c^2} \end{array}$$

essendo **w** l'accelerazione tridimensionale ordinaria, lungo l'asse x; l'unico asse dove c'è movimento. È pertanto, $w'^2 = w'^3 = 0$.

Poi:

$$w'^i w'_i = -w^2/c^4. \tag{6}$$

che è costante per ipotesi.

La condizione precedente, (6), è la relazione invariante nei sistemi di riferimento K e K'.

Verifichiamo (6) in K. Allora dalle equazioni (1),

$$\begin{array}{ll} w^0 = \gamma(w'^0 + \beta w'^1) & = \gamma\beta w'^1 = \gamma\beta \frac{w}{c^2} \quad (7) \\ w^1 = \gamma(w'^1 + \beta w'^0) & = \gamma w'^1 = \gamma \frac{w}{c^2} \end{array}$$

Poi in K,

$$w^i w_i = w^0 w_0 + w^1 w_1 = \gamma^2 \beta^2 \frac{w^2}{c^4} - \gamma^2 \frac{w^2}{c^4} = -\frac{w^2}{c^4}(1 - \beta^2)^2 = -\frac{w^2}{c^4} \tag{8}$$

come doveva essere.

Da (8) segue anche,

$$\begin{array}{rl} -\frac{w^2}{c^4} = w'^i w'_i & = \frac{d}{ds}(u^1) \cdot (-\frac{d}{ds}(u_1)) \\ & = -\frac{d}{cdt}(\frac{\gamma}{c} v_x) \cdot \frac{d}{cdt}(\frac{\gamma}{c} v_x) \\ & = \frac{-1}{c^4} \left(\frac{d}{dt}(\gamma v) \right)^2 \end{array}$$

da cui,

$$\frac{d}{dt}(\gamma v) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = w,$$

dove $v = v_x$, è la velocità lungo l'asse delle x e w la relativa accelerazione.

Risolvendo l'ultima equazione differenziale otteniamo

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = wt + C \ (C\ costante).$$

Ponendo $v(0) = 0$, C $= 0$, segue,

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = wt.$$

Elevando poi al quadrato,

$$\begin{array}{lll} w^2t^2 & = \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}, & \frac{1}{w^2t^2} = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{v^2} = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}, \\ \frac{1}{v^2} & = \frac{1}{w^2t^2} + \frac{1}{c^2}, & v^2 = \frac{w^2t^2c^2}{w^2t^2+c^2} \quad = \frac{w^2t^2}{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} \quad (10) \end{array}$$

Poi,

$$v = \frac{d}{dt}x = \frac{wt}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}. \tag{11}$$

Integrando questa equazione differenziale e imponendo $x(0) = 0$, si ottiene

$$x = w\int_0^t \frac{tdt}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}.$$

Introducendo la variabile u, tale che,

$$\left(\frac{wt}{c}\right)^2 = u^2, \quad 2\frac{w^2}{c^2}tdt = 2udu, \quad \frac{w^2}{c^2}tdt = udu,$$

si ottiene,

$$\begin{array}{ll} x & = \frac{c^2}{w}\int_0^{cu/w} \frac{udu}{\sqrt{1+u^2}} = \int_0^{c\tan\theta/w} \frac{\tan\theta d(\tan\theta)}{\sec\theta} \\ & = \frac{c^2}{w}\int_0^{c\tan\theta/w} \tan\theta\sec\theta d(\theta) \quad = \frac{c^2}{w}\ \sec\theta + C \\ & = \frac{c^2}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} + C\right). \quad (12) \end{array}$$

Se $x(0) = 0$, allora $0 = (c^2/w)(1 + C)$, da cui $C = -1$ e il moto relativistico uniformemente accelerato è:

$$x(t) = \frac{c^2}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} - 1\right). \tag{13}$$

Qui notiamo che se $wt \ll c$ in (11), otteniamo la nota formula in meccanica classica

$$v = wt. \tag{14}$$

e da (13) e da $\sqrt{1+x^2} = 1 + (1/2)x^2 + O(x^4)$,

$$x = \frac{1}{2}\frac{c^2}{w}\frac{w^2t^2}{c^2} = \frac{1}{2}wt^2. \tag{15}$$

Infine se $wt \to \infty$, la velocità in (11),

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{w^2t^2} + \frac{1}{c^2}}} \to c.$$

Il tempo proprio τ di una particella animata da un moto uniformemente accelerato è dato da

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{\gamma} = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ dt\ = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}}}.$$

Infatti da (11),

$$1 - \frac{v^2}{c^2}\ =\ 1 - \frac{w^2t^2}{c^2\ (1\ +\ \frac{w^2\ t^2}{c^2})}\ =\ 1 - \frac{w^2t^2}{c^2 + w^2t^2} = \frac{c^2}{c^2 + w^2t^2}\ = \frac{1}{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}}.$$

Con $wt/c\ =\ u$, $(w/c)dt = du$, si ha:

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}}} = \frac{c}{w}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Poi se $u\ = \mathrm{senh} z,\ du = \cosh z dz,\ \sqrt{1 + u^2} = \sqrt{1 + \mathrm{senh}^2 z} = \cosh z$, allora per l'integrale indefinita, abbiamo,

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int dz = z + C = \mathrm{Arcsenh}\ u + C.$$

Quindi,

$$\tau = \frac{c}{w}\mathrm{Arcsenh}\left(\frac{wt}{c}\right)\Big|_0^t = \frac{c}{w}\mathrm{Arcsenh}\left(\frac{wt}{c}\right)\ = \frac{c}{w}\ \ln|\frac{wt}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{wt}{c}\right)^2}|. \quad (16)$$

Al limite per $t \to \infty$, risulta, $wt/c = 1/2\, exp(w\tau/c)$ e prendendo logaritmo

$$\tau = \frac{c}{w}\ln|2\frac{wt}{c}|,$$

allora il tempo proprio cresce quando $t \to \infty$, più lentamente di t e precisamente cresce con l'ordine logaritmico.[1]

Poi come da (13), abbiamo

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{w\,x}{c^2} + 1\right)^2 &= 1 + \tfrac{w^2\,t^2}{c^2} \\ \tfrac{w^2}{c^4}\left(x + \tfrac{c^2}{w}\right)^2 &= 1 + \tfrac{w^2\,t^2}{c^2} \quad (17) \end{aligned}$$

da cui segue,

$$\left(x + \frac{c^2}{w}\right)^2 - (ct)^2 = \frac{c^4}{w^2} \qquad (18)$$

che è una iperbole nel piano $x,\ c\,t$ e da qui il nome di *moto iperbolico.* Se poi si risolve per t, allora otteniamo

$$t = \sqrt{\frac{x^2}{c^2} + \frac{2\,x}{w}} \simeq \frac{x}{c}. \qquad (19)$$

che utilizzeremo nei calcoli della sezione seguente.

[1]segue anche da (16) notando che $\sqrt{1 + u^2} = O(u)$.

4. Applicazioni.

Esempio 1. Viaggio verso il centro della galassia.
Calcolare il tempo proprio misurato dagli occupanti di un razzo che viaggia dalla Terra verso il centro della Galassia, percorrendo una distanza di $\sim$ 30.000 anni luce. Si assuma che per metà viaggio l'astronave abbia una accelerazione $g = (9.80665cm/s^2)$ e per la seconda parte del viaggio l'astronave abbia una decelerazione $-g$.

<u>*Soluzione.*</u>
Utilizzando (19), per la prima metà del viaggio il tempo è $t \simeq \frac{x}{c} = 15.000$ anni luce. Poi per la reversibilità del moto, il tempo nella seconda metà del viaggio il tempo è esattamente lo stesso, cioè 15.000 anni. Ora da (16),

$$\begin{aligned} \tfrac{\tau}{2} &= \tfrac{c}{w} Arcsenh \tfrac{w\,t}{c} \\ &= \tfrac{2{,}99792458\times 10^{10}}{9{,}80665} Arcsenh\left(\tfrac{9{,}80665\times 1{,}5\times 10^{4}}{2{,}99792458\times 10^{10}} 3,155692608 \times 10^{7}\right) \\ &= 10,01748405685246 \quad anni. \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione è:[2] $\tau = 20,03496811370492 \quad anni.$

Esempio 2. Il Consumo della massa in un viaggio al centro della galassia.
Quale frazione della massa iniziale del razzo può essersi consumata nel viaggio del problema precedente ? Si assuma che il razzo converta la massa restante in radiazioni, che vengono espulse con una efficienza del 100%.

<u>*Soluzione.*</u>
Una radiazione luminosa monocromatica di frequenza ν è costituita da un certo numero di enti, detti *fotoni*, aventi tutti una certa energia E, ed uno stesso *impulso*, p, legato alla loro energia dalla relazione

$$p = \frac{E}{c},$$

dove c è la velocità della luce. Poi dalla legge di Einstein su l'effetto fotoelettrico[3]

$$E = \hbar\nu,$$

($\hbar$ è la costante di Planck) abbiamo,

$$p = p_{rad} = \frac{\hbar\nu}{c} = \frac{m}{c}$$

dove l'ultima segue per definizione d'impulso. Se deriviamo con rispetto a τ, il tempo proprio, allora

$$\frac{dp_{rad}}{d\tau} = -c\frac{dm}{d\tau}$$

D'altra parte, dalla meccanica relativistica, abbiamo,

$$\frac{dp}{d\tau} = mw$$

Poi uguagliando, otteniamo l'equazione differenziabile,

[2] con 14 cifre decimali.
[3] che le valse in nobel.

$$mw = -c\frac{dm}{d\tau},$$
$$\frac{dm}{m} = -\frac{w}{c}d\tau.$$

Se misuriamo il tempo in anni, 1 *anno* $\approx \frac{c}{w}sec$, allora,

$$-\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = \tau(in \quad anni)$$

Poi,

$$\ln\frac{m_0}{m} = \tau, \quad m = m_0 e^{-\tau}.$$

Valutando per l'esercizio precedente,

$$m = m_0 \cdot e^{-10 \ anni} \approx 5,54 \times 10^{-5} m_0.$$

Insomma, perché il razzo possa raggiungere il centro della galassia, il motore del razzo deve trovare una sorgente di energia all'esterno, altrimenti la sua massa si ridurrebbe considerevolmente.

Esempio 3. Il Paradosso dei gemelli.

a. *Mostri che tra tutte le linee d'universo collegando gli eventi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, quella con la più lunga variazione di tempo proprio e quella senza accelerazione.*

   Soluzione.

   Per risolvere il problema bisogna verificare che,

$$\tau(w) < \lim_{w\to 0}\tau(w) = \lim_{w\to 0}\frac{c}{w} \ \ln|\frac{wt}{c} + \sqrt{1+\left(\frac{wt}{c}\right)^2}|.$$

   Il nostro limite è del tipo 0/0. Poi se denotiamo con,

$$f(w) = c \ \ln|\frac{wt}{c} + \sqrt{1+\left(\frac{wt}{c}\right)^2}|, \quad g(w) = w$$

   abbiamo,

$$\lim_{w\to 0} f'(w) = c \lim_{w\to 0} \frac{\frac{t}{c} + \frac{1}{2}(1+(\frac{w\,t}{c})^2)^{-1/2}\cdot 2\,\frac{w\,t}{c}\frac{t}{c}}{\frac{w\,t}{c} + \sqrt{1+(\frac{w\,t}{c})^2)}} = t,$$
$$\lim_{w\to 0} g'(w) = 1$$

   Pertanto come,

$$\lim_{w\to 0}\frac{f'(w)}{g'(w)} = t, \quad \Rightarrow \lim_{w\to 0}\frac{f(w)}{g(w)} = t.$$

   abbiamo la tesi.

b. *Uno dei gemelli sceglie di spostarsi ad $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ sulla linea d'universo senza accelerazione. Mostri che l'altro gemello, con una appropriata scelta di accelerazioni, può andare da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ in un tempo proprio piccolo, arbitrariamente prefissato.*

   Soluzione. Questo è evidente dalla parte a. e dalla definizione di limite.

c. *Se il secondo gemello preferisce vivere in comfort, con una accelerazione sempre inferiore a una gravità terrestre, g. Quale è il minore intervallo di tempo proprio tra gli eventi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$? Esprima la risposta in termini di g e del intervallo Δt misurato dall'altro gemello senza accelerazione.*

<u>*Soluzione.*</u>

Come dalla parte a. il tempo proprio del primo gemello (senza accelerazione) è un tempo tridimensionale t, allora la soluzione è:

$$\frac{c}{g}Arcsenh(\frac{gt}{c}).$$

d. *Vediamo alcuni esempi interessanti.*

Il problema 1, ci conferma le nozioni note sulla teoria della relatività e sul paradosso dei gemelli. Infatti, se tra due gemelli, uno resta sulla Terra, con una accelerazione non superiore a una gravità terrestre g, e l'altro parte per il centro della Galassia, allora alla conclusione del viaggio, il primo gemello è $(\tau - t)$ anni più vecchio di quello che ha realizzato il viaggio, dove τ si calcola da (16), essendo $\mathbf{w}$ l'accelerazione con cui si muove, dove la velocità v deve essere non inferiore alla seconda velocità cosmica, $v_2 = 11,2Km/s$, minima indispensabile per lasciare la gravità terrestre, dove si utilizza (19) per calcolare il tempo t.

Ma dal problema (2), vediamo che questo viaggio, non è possibile per distanze molto lunghe, perché fino ad oggi, i razzi, creano l'energia per spostarsi, e non la ottengono dall'esterno.

Pertanto un viaggio fattibile, ad esempio è quello lunare. Chiediamoci, quanti secondi riesce a guadagnare con rispetto a noi sulla terra, un astronauta, al suo atterraggio sulla luna.

La nostra $x = 3,844 \times 10^5 Km$ = distanza Terra-Luna (dai centri). Poi, da (19),

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{(\tfrac{3,844\times10^5}{3\times10^5})^2 + 2\tfrac{3,844\times10^5}{3\times10^5}} \\ &= 506,2295040352494s \end{aligned}$$

dove abbiamo supposto che l'accelerazione sia di $3Km/s^2$. Poi,

$$\tau = \frac{2,99792458 \cdot 10^{10}}{3} Arsenh(3\frac{506,2295040352494}{2,99792458 \cdot 10^{10}}) = 506,227338889189$$

Così, l'astronauta al suo arrivo sulla luna è più giovani di tutti noi di,

$$t - \tau = 0,002165146060349s.$$

Sono questi risultati validi sulla terra ?.

Se prendiamo $x = 10^3$ Km, $g = 9,80665$ m/s, allora otteniamo,

$$t - \tau = 1,742051836117753 \times 10^{-8}s.$$

Insomma, per poter sentire il tempo proprio dobbiamo, sentire accelerazioni spaziali.

Calcolare con 40 cifre decimali, il τ anteriore equivale a confrontare con l'esperienza che sulla Terra il tempo proprio, non è percepibile. È non lo è nella stessa misura in cui la meccanica classica ha dominato la nostra coscienza dai tempi di Newton, fino a l'inizio di questo secolo.

La teoria della relatività ci mostra quale un microscopio quello che i nostri sensi intuiscono ma non percepiscono la realtà.

Giovanni Orlando.

e. *La Teoria della Relatività è errata e non esiste alcun paradosso.*

Negli ultimi anni ho annunciato ed è in via di sviluppo un Libro che prima verrà pubblicato in Inglese con in titolo, "Why Einstein Theory is Wrong?" dove la Teoria del Professor Einstein viene demolita, nonché la velocità della luce come una costante.

Al momento di scrivere questa nota aggiuntiva non ho sviluppato le formule necessarie per riconvertire questa Tesina, esposta a Bologna nel Dicembre del 1992.

Comunque alcune esempi di viaggi possibili sono stati esposti sul nostro sito, ma in lingua Inglese, dove verrà tradotta e riproposta questa tesina.

Grazie, In fede, Gennaio 2015.

Bibliografia.

1. Lev Davidovič Landau, Evgenji M Lifšits — "Teoria dei Campi", *Editori Riuniti, Roma* (1985), p42.

2. Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John A. Wheeler — "Gravitation", *W.H. Freeman and Company, San Francisco* (1975), p160.

3. Marco Todeschini. — *La Teoria delle Apparenze.* - 971 pages, published in 1949 by Bergamo, Istituto italiano d'arti grafiche.